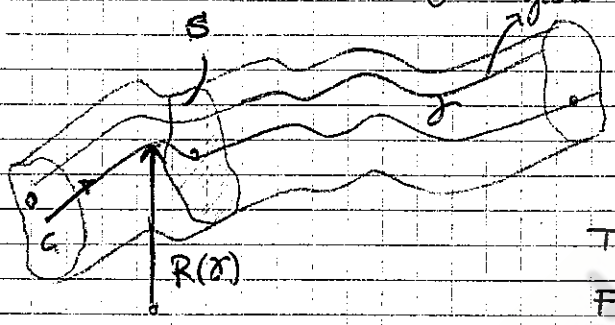
Meccanica dei Solidi

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

1 dimensione prevalente = solido generato dal movimento di una superficie regolare piana S (detta sezione) mantenendo il proprio baricentro su una curva regolare γ (detta asse) con S ⊥ alla tang γ



lunghezza $(\gamma) \gg$ Diam (S)

Raggio $(\gamma) \gg$ Diam (S)

Snervabile con Raggio $\gg$ Diam (S) (fibre)

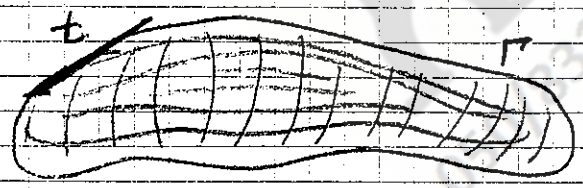
TRAVE o ARCO se $L \geq 10D$

FILO FUNE se $L \geq 100D$

2 dimensioni Prevalenti = solido generato dal movimento di un segmento di lunghezza t che mantiene il suo baricentro su una superficie regolare Γ tale che t sia $\perp$ al piano tangente π

Diam $(\Gamma) \gg |t|$ $\quad D \geq 10|t|$ lastra guscio

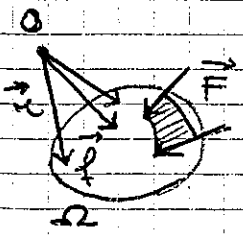
Rmin $(\Gamma) \gg |t|$ $\quad D \geq 100|t|$ membrane tensostrutture



MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Solidi Continui (Analisi della tensione)

FORZE ESTERNE



forze superficiali (di contatto) $\vec{F}$ $\quad \left[\frac{F}{L^2}\right]$

forze di volume (a distanza) $\vec{f}$ $\quad \left[\frac{F}{L^3}\right]$

condizione di equilibrio

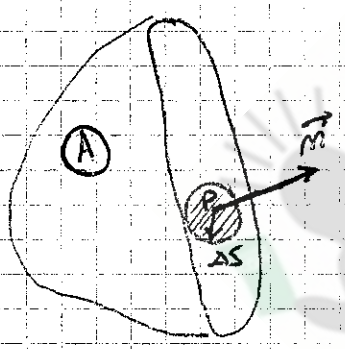
$$\int_{\partial\Omega} \vec{F}\, d\vec{s} + \int_{\Omega} \vec{f}\, dV = 0 \qquad \text{traslazione}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

$$\partial_{\Omega} \int \vec{F} \times \vec{r}\, ds + \int_{\Omega} \vec{f} \times \vec{r}\, dV = 0 \qquad \text{Rotazione}$$

baricentro $\vec{r}_G = \dfrac{\int_{\Omega} \vec{r}\, ds}{\int_{\Omega} ds}$

Se un corpo all'equilibrio viene tagliato non è detto che le due parti siano all'equilibrio.



$\vec{R} = \vec{R}_A + \vec{F}_A = 0$ (forze esterne; forze interne (tensioni))

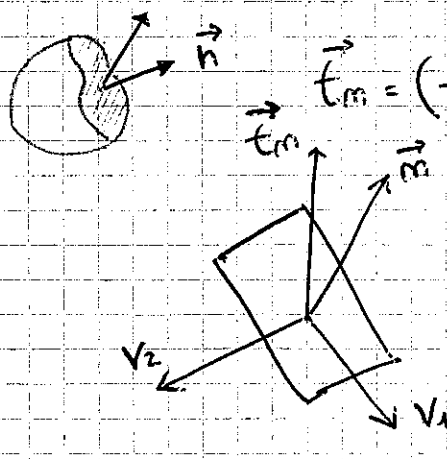
$\vec{F}_A = -\vec{R}_A$

$\vec{M}_0 = \vec{M}_A + \vec{M}_A$ (forze esterne; tensioni)

$\vec{M}_A = -\vec{M}_A$

Attenzione sul punto P $\quad \lim_{|\Delta S| \to 0} \dfrac{\Delta \vec{F}}{|\Delta s|} = t(P, \vec{n})$ vettore tensione totale in P (se $\Delta S \perp \vec{n}$)

$\vec{t}_n(P, \vec{n}) = (x_P, y_P, z_P, h_x, h_y, h_z)$ 6 variabili

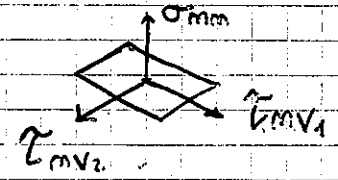


$\vec{t}_n = (t_{nn}; t_{nV_1}; t_{nV_2}) \equiv (\sigma_{nn}, \tau_{nV_1}, \tau_{nV_2})$

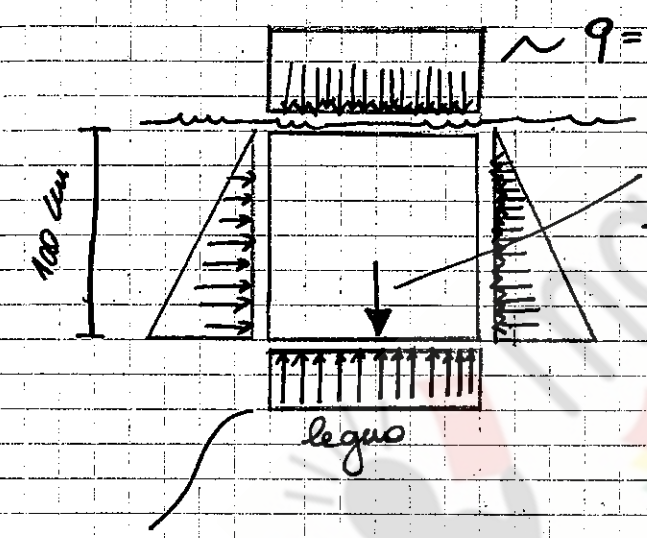
σ_{nn}: tensione normale; τ_{nV_1}, τ_{nV_2}: tensione tangenziale

per il momento $\lim_{|\Delta S|\to 0} \frac{\Delta \vec{R}}{|\Delta S|} = 0$, ci sono terre in cui non lo è, questi solidi si dicono di COSSERAT ma non sono molto utilizzati.

unità di misura $MPa = \left[\frac{N}{mm^2}\right]$



Esercizio



$\int_\Omega f\, dV = 500\ daN$

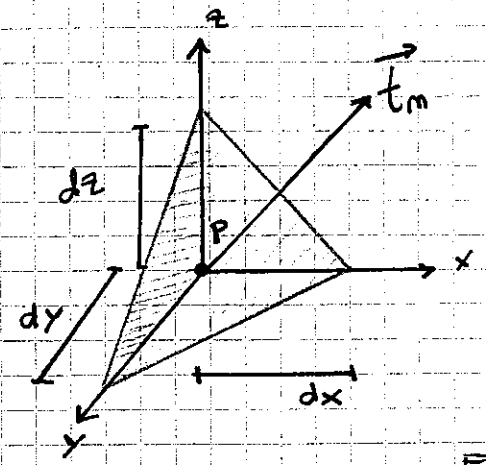
$\gamma_w \cdot L = 1000 \frac{daN}{m^3} \cdot L = 1000 \frac{daN}{m^3} \cdot 1m = 0{,}01\ MPa$

$\frac{1000\ daN}{m^2}$ peso specifico $\frac{500\ daN}{m^3} = \gamma_L$

$\int_{d\Omega} q\, dS = qS = qL^2 = 1000 - 500 \Rightarrow q = 500 \frac{daN}{m^2}$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

★ Teorema del tetraedro di Cauchy



consideriamo un tetraedro piccolissimo
(posso confondere P con l'origine)

$\vec{m} \equiv (m_x, m_y, m_z)$

Su ogni triangolo agisce una t che
chiamo t_x, t_y, t_z ognuna con 3 componenti.

Equilibrio alla x:

$$t_{mx}\,dA - t_{xx}\,dA_x - t_{yx}\,dA_y - t_{zx}\,dA_z = 0$$

$$\Downarrow$$

$$t_{mx}\,dA - t_{xx}\,m_x\,dA - t_{yx}\,m_y\,dA - t_{zx}\,m_z\,dA = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{t_{mx} = \sigma_{xx}m_x + \tau_{yx}m_y + \tau_{zx}m_z}$$

$$t_{my} = \tau_{xy}m_x + \sigma_{yy}m_y + \tau_{zy}m_z$$

$$t_{mz} = \tau_{xz}m_x + \tau_{yz}m_y + \sigma_{zz}m_z$$

$dA_x = m_x\,dA$

$dA_y = m_y\,dA$

$dA_z = m_z\,dA$

ma...

$t_{xx} = \sigma_{xx}$

$t_{yx} = \tau_{yx}$

$t_{zx} = \tau_{zx}$

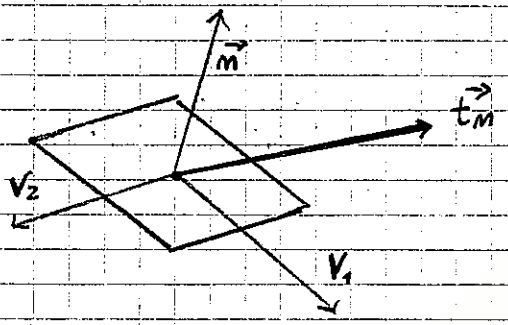
MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

La tensione è un vettore che dipende dal punto e dalla normale alla sup.

$$\vec{t_n}(P,\vec{n}) = \lim_{|\Delta S|\to 0} \frac{\Delta \vec{F}}{|\Delta S|} \qquad \vec{t_n} = \vec{n}\cdot T_{3\times 3}$$

$$\vec{m_n}(P,\vec{n}) = \lim_{|\Delta S|} \frac{\Delta \vec{M}}{|\Delta S|} = 0 \quad \text{(per ipotesi)} \qquad T \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

2ª Versione del tetraedro di Cauchy (più utilizzata)



Scomponendo $\vec{t_n}$ in una riferimento locale

$$\vec{t_n} = \begin{pmatrix} \sigma_{nn} \\ \tau_{nV_1} \\ \tau_{nV_2} \end{pmatrix}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

$$\vec{n} \equiv (n_x, n_y, n_z)$$

$$\vec{t_n} = \begin{cases} \sigma_{nn} = \vec{t_n}\cdot\vec{n} \\ \tau_{nV_1} = \vec{t_n}\cdot\vec{V_1} \\ \tau_{nV_2} = \vec{t_n}\cdot\vec{V_2} \end{cases} \qquad \vec{t_n} \equiv (t_{nx}, t_{ny}, t_{nz})$$

$$\sigma_{nn} = n^T \cdot T \cdot n = [T\cdot n]\cdot n$$

$$\tau_{nV_1} = n^T \cdot T \cdot V_1 = [T\cdot n]\, V_1$$

$$\tau_{nV_2} = n^T \cdot T \cdot V_2 = [T\cdot n]\, V_2$$

La matrice T si chiama tensore degli Sforzi

$$\sigma_{nn} = t_{nx}\cdot n_x + t_{ny} n_y + t_{nz} n_z =$$

↑ sostituendo le t_n

$$= (\sigma_{xx} n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z) n_x +$$

$$+ (\tau_{yx} n_x + \sigma_{yy} n_y + \tau_{zy} n_z) n_y +$$

$$+ (\tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_{zz} n_z) n_z =$$

$$\sigma_{xx} n_x^2 + \tau_{yx} n_y n_x + \tau_{zx} n_z n_x + \tau_{yx} n_x n_y + \sigma_{yy} n_y^2 + \tau_{zy} n_z n_y + \tau_{xz} n_x n_z + \tau_{yz} n_y n_z + \sigma_{zz} n_z^2$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745